У зачецима математике један од основних задатака је био проблем рачунања површине и запремине. Површина правоугаоника се лако одређује из мерења дужина страница a и b јер је његова површина дефинисана као производ страница, тј. P=ab.
Површину паралелограма и троугла можемо мерити трансформацијом правоугаоника, док се било који многоугао може поделити на троуглове и тако можемо израчунати његову површину.
Проблем је што се на овај начин не може мерити површина било којег лика, тј. коме је један руб описан кривом. Такав једноставан скуп називамо криволиниским трапезом. То је скуп тачака равни ограниченим са три стране дужинама, а са четврте стране кривом.
Већ при извођењу површине круга морамо се користити апроксимацијама.
Архимед, један од највећих математичара старе Грчке, се већ у трећем веку пре нове ере користио поступком који је касније назван метода исцрпљивања или ексхаустије. Он је рачунао површину круга уписујући му и описујући правилне многоуглове. Повећавајући им број страница, могао је израчунати површину са довољном тачношћу. Користећи методу ексхаустије и равнотеже полуге Архимед је израчунао запремину кугле и површину сфере. Уписујући круг у правилни 96-остраник našao је апроксимацију EMBED Equation.3 .
Математичари су на различите начине покушали да реше проблем рачунања запремине и површине и имали су методе прилагођене конкретном лику или телу. Тек крајем 17. века тај проблем је решен, али не геометријски већ аналитички.
Површина криволинијског трапеза и интегралне суме
Као и код рачунања површине круга, можемо сличан принцип искористити за рачунање површине било којег лика омеђеног „глатком“ затвореном кривом. Хоризонталним и вертикалним цепањем можемо сваки лик поделити на више криволиниских трапеза. Тако проблем површине криволиниског трапеза сводимо на рачунанје површине испод графика неке функције.
Узмимо неку функцију f, непрекидну и позитивну на интервалу [a,b]. Површину ћемо апроксимирати правоугаоницима.
Најпре одаберимо n-1 тачку из интервала [a,b], тако да важи:
a=x0<x1<…<xi-1<xi<….<xn-1
Дужина сваког интервала је (xi=xi-xi-1, а највећу од тих дужина означавамо са ||(||. Над сваким интервалом [xi-1,xi], поставићемо два правоугаоника, један који лежи испод графика, и други који га премашује.
Како је функција f непрекидна на [a,b], тада је непрекидна и на [xi-1,xi], и зато на том интервалу има највећу вредност и обележићемо је са Mi, и најмању вредност mi. Сада имамо правоугаонике којима је једна страница дужине (xi, док им је друга страница дужине mi или Mi. Сада можемо површину P испод графика апроксимирати функцијама:</x1<…<xi-1<xi<….<xn-1